Volatilitätsmodelle in der Praxis

Hans Bühler
Global Quantitative Research, Deutsche Bank AG Global Equities

hans.buehler@db.com
http://www.dbquant.com

Berlin, May 8th 2003

Deutsche Bank

Übersicht

- Die implizite Volatilitätsstruktur
  - Eigenschaften, Implikationen
- Modellierung mit Ein-Faktor-Modellen
  - Dupire, Derman-Kani
  - Eigenschaften und Konsequenzen.
- Modellierung mit stochastischer Volatilität
  - Prinzipien, Pricing und Hedging
  - Beispiel: Heston, CGMY
- Vergleich verschiedener Modelle
- Zusammenfassung

Implied Volatility

- Die “implizite Volatilität” einer Option wird durch Inversion der Black&Scholes-Formel berechnet (gegeben Marktpreis, Discountfaktor und Forward).

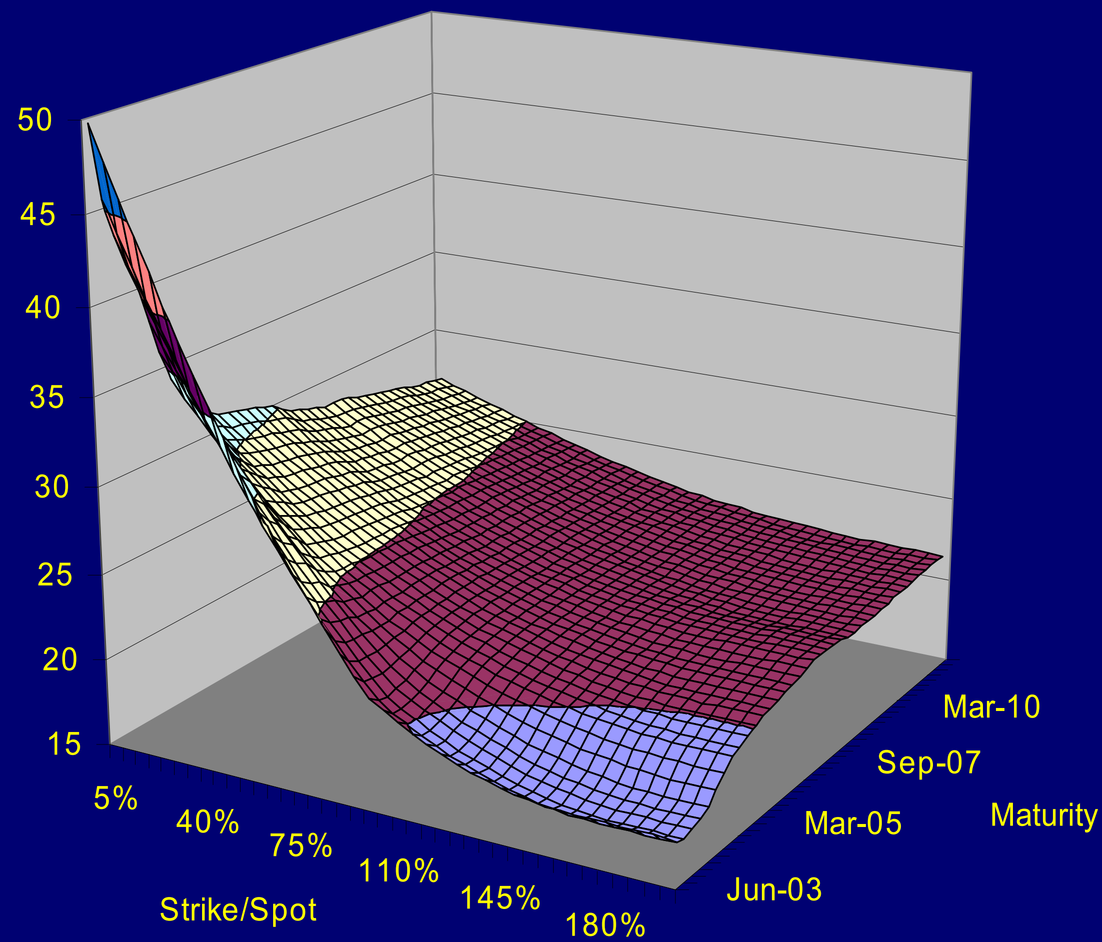
- Das Black&Scholes-Model

$$dS_t = (r_t - d_t)S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

verwendet eine deterministische Volatilität - demzufolge müssten alle Optionen mit einer gemeinsamen Laufzeit die gleiche Volatilität implizieren.

$\rightarrow$ Dies ist leider nicht der Fall:

Implizite Volatilität - Nikkei 225 am 15.April 2003



Der Smile

- Eingenschaften:
  - Die Volatiliät steigt bei fallendem Strike (Optionen sind teurer).
  - Dieser “Smile” läßt bei längerer Laufzeit nach.
  - Seine spezielle Form hängt vom Markt ab.
  - Existiert in ausgeprägter Form seit 1987.

- Warum existiert der Smile:
  - Asymmetrie in der Riskobewertung von Preisbewegungen.
  - Historische Korrelation zwischen Volatilität und Preisniveau ist negativ.
  - Puts werden zur Kreditsicherung eingesetzt.

"Pricing with a Smile"

(Dupire Risk Jan 1994)

- Viele exotische Produkte sind Smile-senstiv:
  - Barriers, z.B. "up-and-out" call: $1_{\{\sup_{t \le T} S_t < B\}} \cdot (S_T - K)^+$
  - Convertible Bonds
  - Altiplanos
  - Conditional Trigger Swaps
  - etc.
- Dies erfordert die Abkehr vom klassischen Black&Scholes-Model und den Übergang zu erweiterten Modellen

Modellierung - Anforderungen

- Entwicklung neuer Modelle mit den Zielen
  - den Smile mit einem Model konsistent zu reproduzieren,
  - strukturierte Produkte effizient zu preisen und
  - abzusichern.

- Weitergehende Fragen
  - Stabilität des Prozesses über die Zeit (→ Rekalibrierung)
  - Implizite dynamik des Prozesses (→ Forward-Started Options)

Modellierung - Konzepte

- Ein-Faktor Modelle
  - Dupire: Local volatility
  - Derman, Kani: Implied Trees
- Stochastic Volatility
  - Merton: Jump Diffusion
  - Heston: Square-Root process
  - Bates: Heston and Merton zusammen
  - Carr, German, Medan, Yor: VG, CGMY, stochastic time change,...

Ein-Faktor Modelle: Derman Kani - Implied Trees

- Optionspreise für *alle* Strikes und Laufzeiten sind bekannt.
- Stückweise Konstruktion der Übergangswahrscheinlichkeiten im Baum
  $\rightarrow$ Konsistente Bewertung der Optionen auf dem Baum.

- Nachteile:
  - Es können nur Optionen auf den Knoten des Baums berechnet werden
    $\rightarrow$ Neukalibration eventuell notwendig
  - Bei Änderung der numerischen Genaugkeit muß neu kalibriert werden
  - Monte-Carlo Methode per se nicht unterstützt;
    generelle Geschwindigkeitsprobleme bei Bäumen mit langen Laufzeiten.

Ein Faktor-Modelle: Dupire´s Local Volatility

- Eindimensionale Brownsche Bewegung als treibender Prozess. Die Volatilität hängt vom Spot ab:

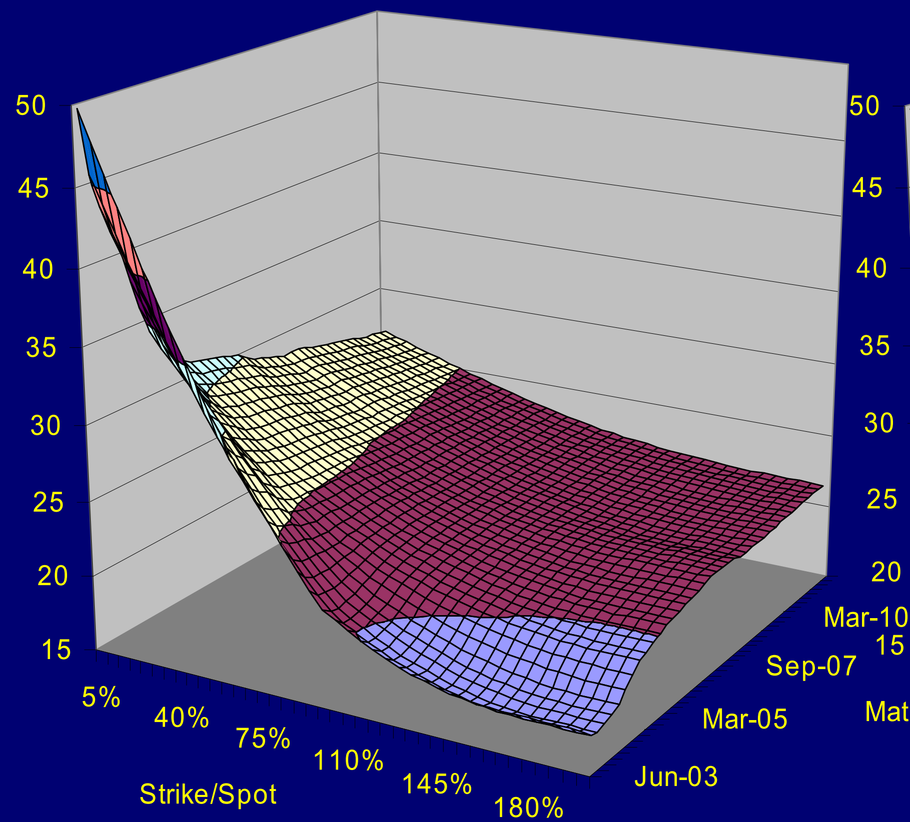
$$dS_t = (r_t - d_t)S_t dt + \sigma_t(S_t)S_t dW_t$$

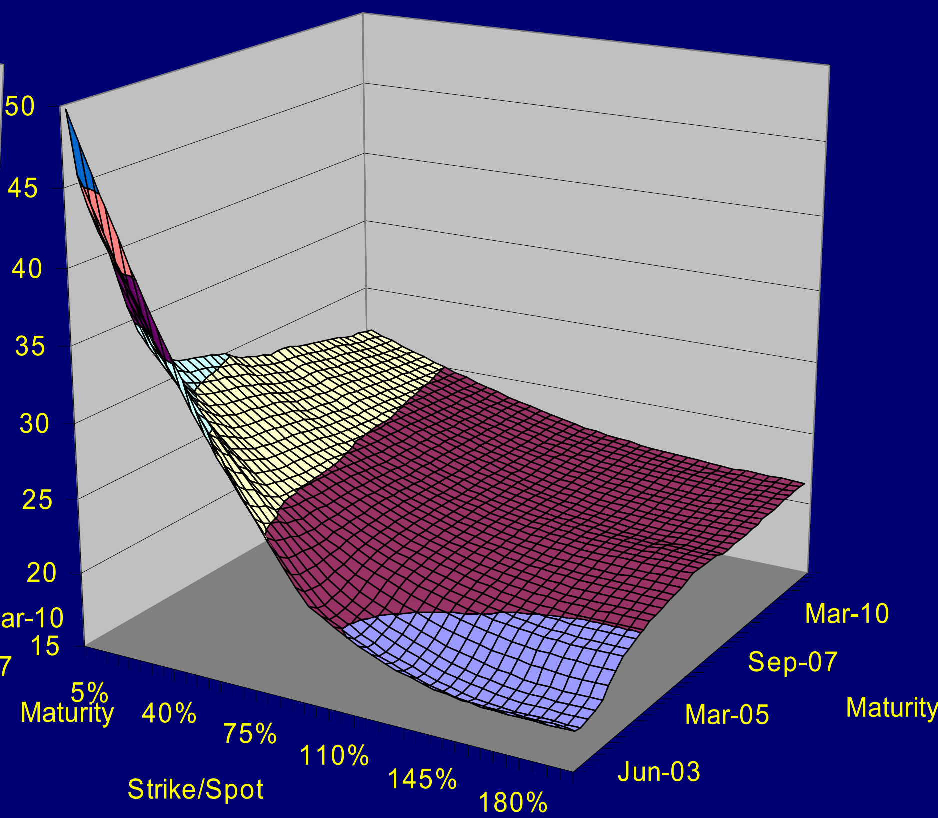
- Für σ existiert nach Dupire eine geschlossene Formel:

$$\sigma_t^2(S) = \frac{\partial_T C_{T,S} + (r_T - d_T)S \cdot \partial_K C_{T,S} + d_T \cdot C_{T,S}}{S^2 \cdot \partial_K^2 C_{T,S}}$$

- Wieder: Alle Call-Preise $C_{T,K}$ seien bekannt.
  - Extrapolation notwendig.

Ein-Faktor Modelle: Dupire





– Probleme bei kurzen Laufzeiten.

Ein-Faktor Modelle: Vorteile von Dupire

- Theoretisch perfekte Randverteilungen → „schöne“ Lösung. Vollständiger Markt.
- Keine Kalibration notwendig, analytische Formel.
- Konsistente Preise bei Laufzeiten über 6m.
- Strukturierte Produkte können effizient mit ein-Faktor Finite Difference Systemen oder Monte-Carlo gepreist werden.

⇒ Dupire’s Modell ist per se gut zur Optionsbewertung geeignet.

Ein-Faktor Modelle: Probleme mit Dupire

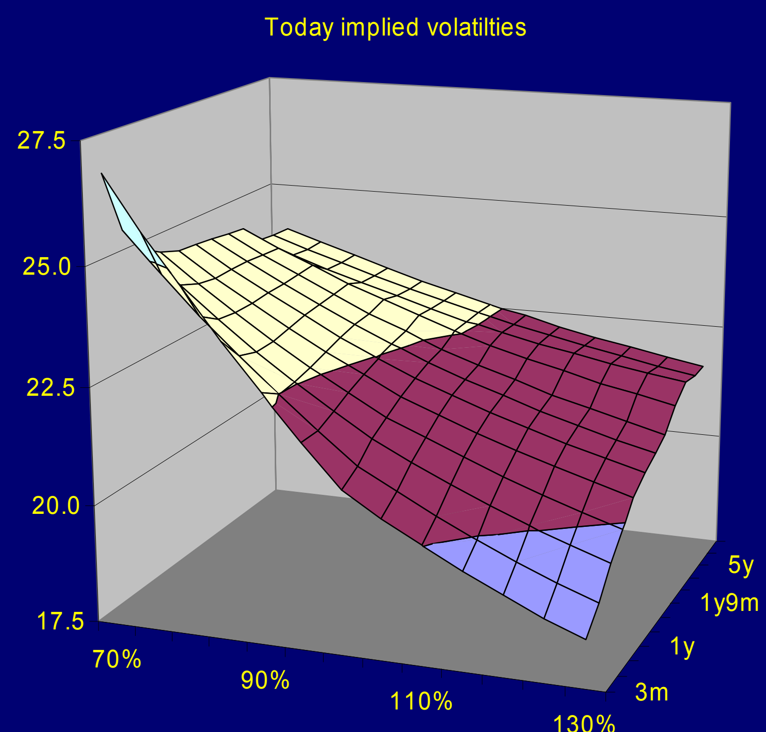
- Technische Probleme:
  - Extrapolation und Interpolation kann großen Einfluß auf den Preis von Optionen am Rand der Marktverteilung haben.

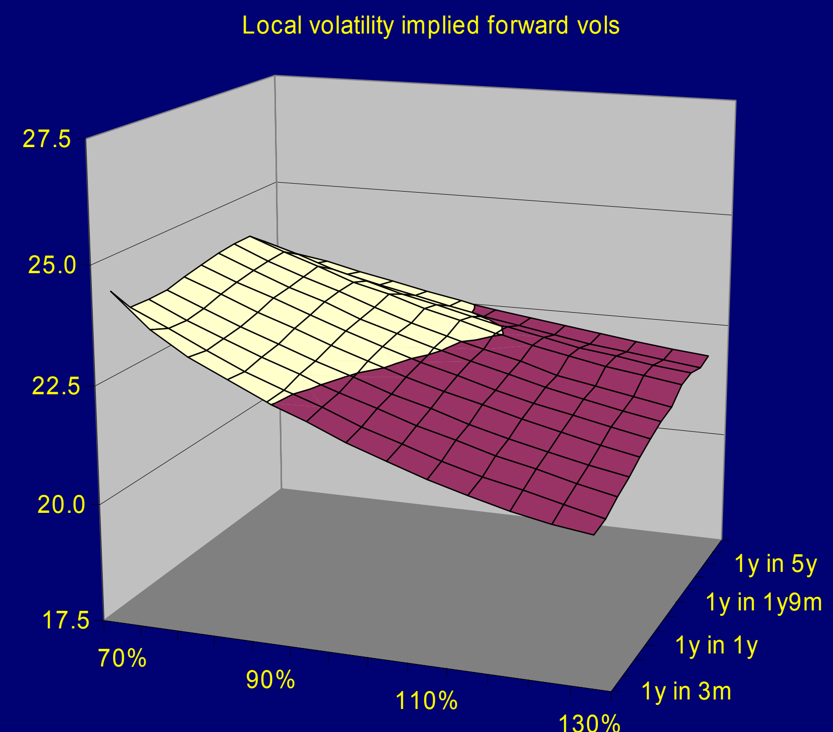
- Absicherung:
  - Die Volatilitätsstruktur ist *nicht* lokal von den Optionen abhängig - zum Absichern eines Produktes muß eine eine große Anzahl von Marktinstrumenten investiert werden (der Markt ist nur theoretisch vollständig).

- Forward Started Options: $\mathbf{E}\left(\frac{S_T}{S_t} - K\right)^+$

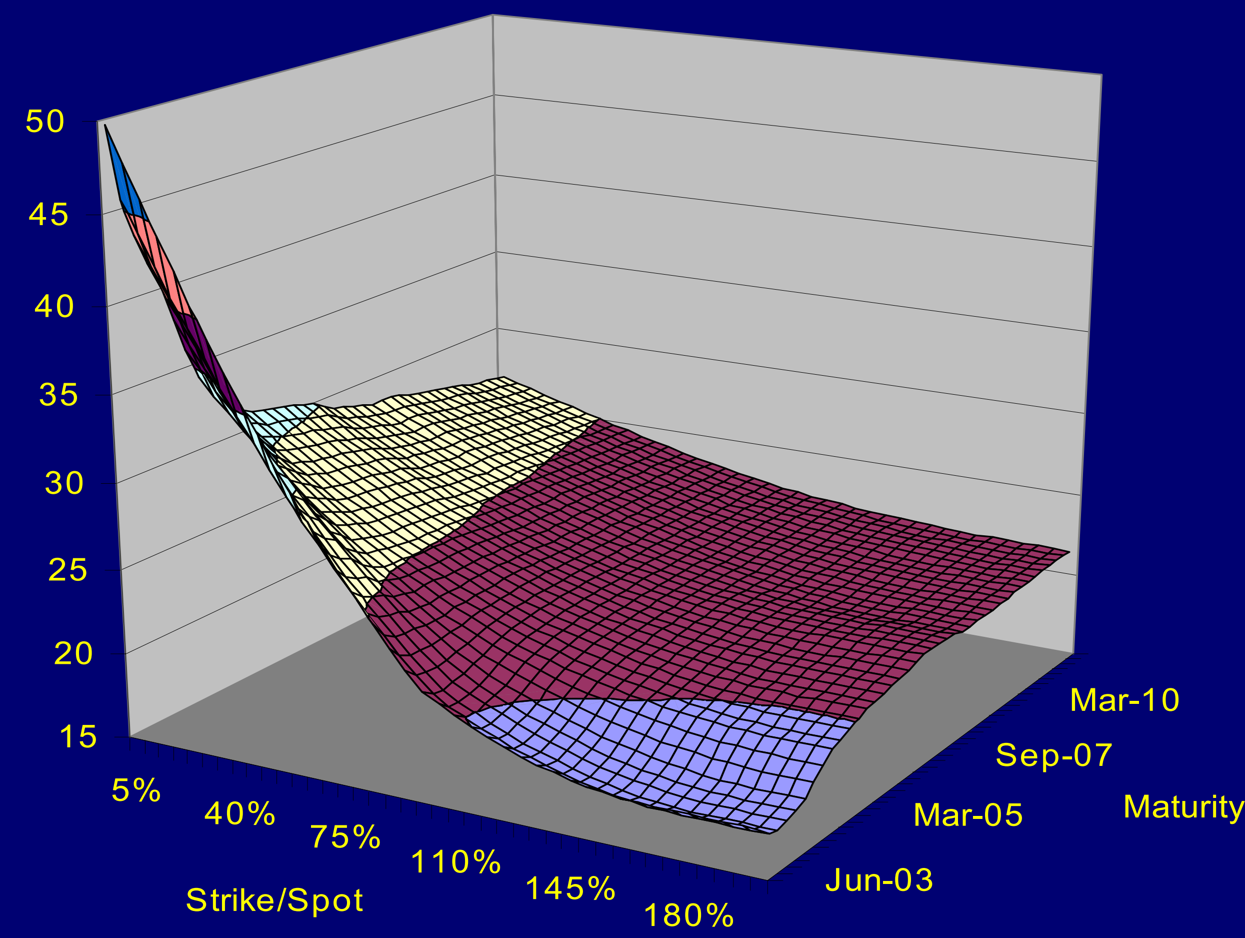
Ein-Faktor Modelle: Probleme mit Dupire

- Inkonsistente Dynamik
  - Die Volatilitätsstruktur ist nicht stabil über die Zeit.





Ein-Faktor Modelle: Local Volatility



Ein-Faktor Modelle: Zusammenfassung

- Vorteile
  - Theoretisch “schön”.
  - Ein-Faktor impliziert schnellere numerische Verfahren
  - Am Bewertungstag konsistent.

- Nachteile
  - Dynamik nicht korrekt
    $\rightarrow$ Neuberechnung erfordert Hedging der Volatilitätsstruktur
    $\rightarrow$ häufige Investitionen in viele Marktinstrumente notwendig.
  - Fehlerhafte “Forward-Start” Preise.

Stochastische Volatilität: Motivation

- Ein erweiteres Model sollte
  - Konsistent mit (wesentlichen) Marktinstrumenten sein.
  - Effizient berechenbar sein.
  - Ein über die Zeit stabiles Verhalten besitzen und “Forward-Start” Optionen korrekt bewerten.
  - Bewertung und absicherung strukturierter Produkte erlauben.
- Der Benchmark ist Dupire.

Stochastische Volatilität: Konzepte

- Modelle mit “stochastischer Volatilität” haben eine Dynamik

$$dS_t = (r_t - d_t)S_t dt + \sigma_t S_t dW_t$$

bei der σ selbst ein stochastischer Prozess ist:

$$d\sigma_t = \lambda_t dt + \zeta_t dW_t^{\sigma}$$

- Andere Varianten verwenden Poissonprozesse.

- Die Integranden λ und ξ werden typischerweise durch Modellparameter $\underline{\sigma}=(\underline{\sigma}_1,..,\underline{\sigma}_\nu)$ spezifiziert.
  - Modelle i.A. nicht vollständig
    $\rightarrow$ Modellparameter nicht eindeutig und müssen geschätzt werden.

Stochastische Volatilität: Beispiel Hull & White

- Hull & White (1987): Log-Normal Variance:

$$d\sigma_t^2 = \theta\sigma_t^2 dt + \zeta\sigma_t^2 dW_t^\sigma$$

  - “Vol of Vol” ξ: kontrolliert die Variation der Volatilität
  - “Average vol” θ: durchschnittliche Volatilität
  - “Correlation” ρ zwischen den treibenden Brownschen Bewegungen.
  - Die implizite variable “Short vol” σ_0 ist nicht beobachtbar und wir demnach wir ein Parameter behandelt.

Stochastische Volatilität: Beispiel Heston

- Heston hat 1993 die folgende Dynamik vorgeschlagen:

$$d\sigma_t^2 = \kappa\left(\theta - \sigma_t^2\right)dt + \zeta\sigma_t dW_t^\sigma$$

  - "Vol of Vol" ξ: kontrolliert die Variation der Volatilität
  - "Long vol" θ: durchschnittliche Langzeitvolatilität
  - "Reversion speed" κ: Drift zur Long Vol.
  - "Correlation" ρ zwischen den treibenden Brownschen Bewegungen.
  - Die implizite variable "Short vol" σ_0 ist nicht beobachtbar und wir demnach wir ein Parameter behandelt.

- Sehr populäres Model.

Stochastische Volatilität: Beispiel JumpDiffusion

- Merton (1987) hat Sprünge im Preisprozess angenommen:

$$dS_t = (r_t - d_t)S_{t-}dt + \sigma_t^{\mathrm{ATM}} S_{t-}dW_t^{\sigma} + S_{t-}dP_t$$

  - Der Prozess P ist ein kompensierter Poisson-Prozess mit Intensität λ und (γ,δ)-normalverteilten unabhängigen Sprüngen.
  - Die impliziten Randverteilung besitzen einen sehr ausgeprägten Smile.

- Bates hat dieses Modell mit Heston´s Ansatz kombiniert.

Stochastische Volatilität: Beispiel CGMY

- Carr, Geman, Medan und Yor (2000): Ein Levy-Prozess mit charakteristischer Funktion

$$\phi_T(v) := \exp\left(TC \cdot \Gamma(-Y) \cdot \{(M - iv)^Y - M^Y + (G + iv)^Y - G^Y\}\right)$$

  - C: Skalierung
  - G und M: Rechts- bzw linksseitiger Abfall der Verteilung (symmetrisch bei Gleichheit)
  - Y: Charakterisierung der Aktivität

- Dieses Model wurde aufgrund statistischer Beobachtungen entwickelt.

Stochastische Volatilität: Konzepte

- PDE für den Einsatz von numerischen Standardmethoden
  - Feynman-Kac für FDs, Euler-Diskretisierung für Monte-Carlo.
  - Dadurch können strukturierte Produkte bewertet werden.

- Zur Berechnung Europäischer Optionen kann nach Carr & Medan (1999) Fourier-Transfomation eingesetzt werden.
  - Schnelle und genaue Berechnung von Europäischen Optionen
  - Erweiterbar auf Forward-Start Vanillas.
  - Erfordert die Kenntnis der charakteristischen Funktion von $X_T := \log(S_T/S_0)$:

$$\phi_T(z) := \mathbf{E}[e^{izX_T}]$$

Stochastische Volatilität: Fourier-Pricing

- Idee:
  - Die charakteristische Funktion ψ des *Callpreises* (in Abhängigkeit vom log-Strike *k:*=log*(K)*) wird durch ϕ ausgedrückt:

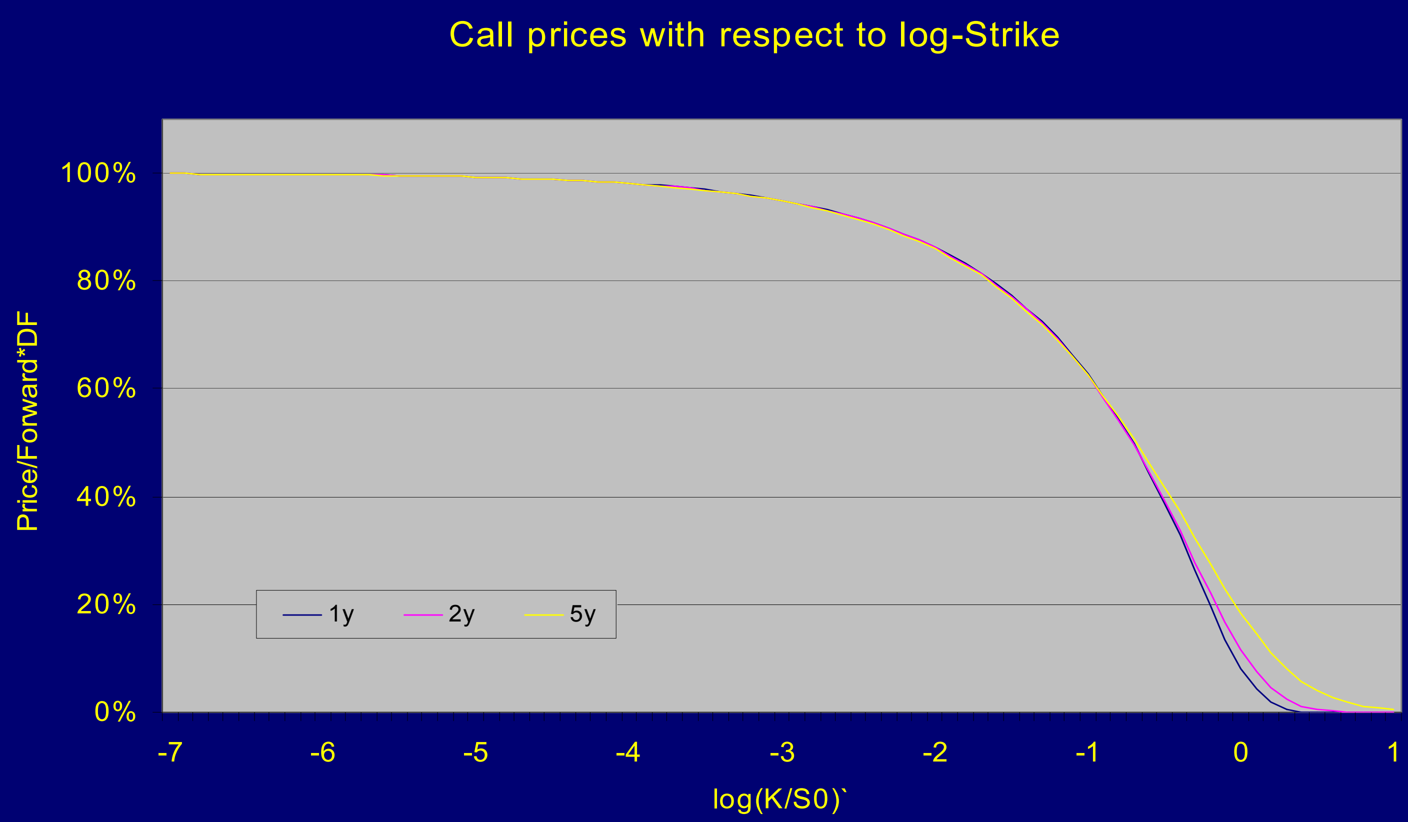
$$\psi_T(v) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ivk}\mathbf{E}[e^{-rT}(e^{X_T} - e^k)]dk \overset{!}{=} F(\phi_T(\cdots))$$

  - Berechnung des Callpreises durch Fourier-Inversion von ψ:

$$C_{T,K}(k) := \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikv}\psi_T(v)dv$$

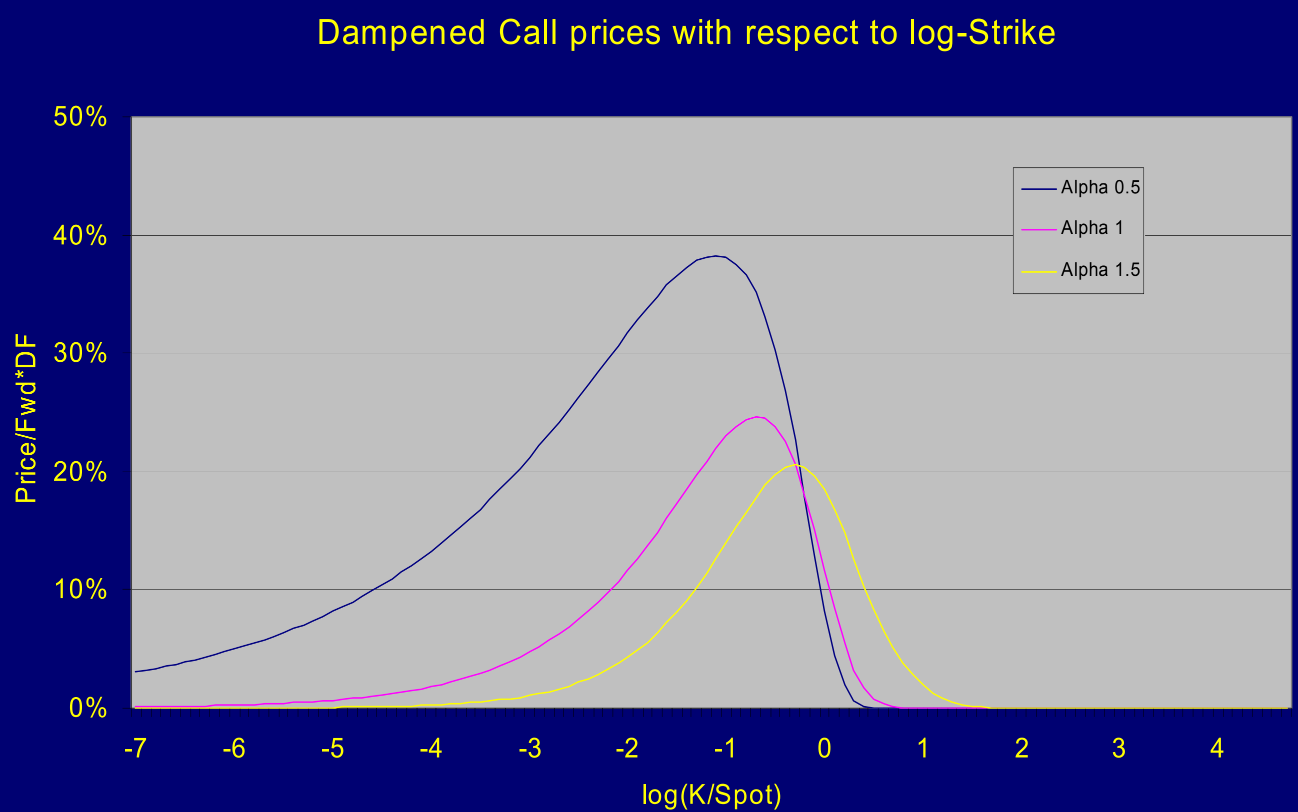
Stochastische Volatilität: Fourier-Pricing

- Problem:
  - Der Preis eines Calls ist nicht in quadratisch integrierbar:



Stochastische Volatilität: Fourier-Pricing

- Lösung: “Dampen” des Preises $\widetilde{C}_{T,k} := e^{\alpha \cdot k} C_{T,e^k}$



Stochastische Volatilität: Fourier-Pricing

- Fuer jedes Model existiert ein α so daß der "gedampte" Call-Preis quadratisch integrierbar ist.
- Dann gilt für die Fourier-Transformierte des modifizierten Preises:

$$\widetilde{\psi}_T(v) := e^{-rT} \frac{\phi_{|T}(v-(\alpha+1)\mathrm{i})}{\alpha^2+2\alpha v\mathrm{i}+\alpha+v(\mathrm{i}-v)}$$

- Diese kann mit Standardverfahren oder einem FFT-Algorithmus integriert werden. Letzterer kann mehrere Preise auf einmal berechnen.

Stochastische Volatilität: Parameterschätzung

- Die vorgestellten Modelle sind allesamt unvollständig. Demzufolge müssen die Modellparameter in Abhängigkeit von "wichtigen" Marktpreisen $(P_i)_{i=1,\ldots N}$ geschätzt werden.

- Diese "Kalibration" bedeutet de facto eine Minimierung von

$$F(\underline{\sigma}) = \sum_{i=1}^{N} w_i \, \mathrm{d}[H_i(\underline{\sigma}), P_i]$$

wobei $H_i(\underline{\sigma})$ den Modellpreis der i. Option unter den Modellparametern $\underline{\sigma}$, d eine Metrik und w einen Vector von Gewichten bezeichnet.

Stochastische Volatilität: Parameterschätzung

- Daher die Notwendigkeit, Europäische Optionen effizient preisen zu können.
- In Verbindung mit FFT-Pricing können mehrer Optionen pro Maturity auf einmal berechnet werden.
- Probleme:
  - “Short Vol” ist eigentlich eine Variable
  - Gewichtung hat hohen Einfluß auf das Ergebnis → saubere Zieldefinition ist notwendig.
  - Generische Minimierung kann in einem lokalen Minimum enden.

Stochastische Volatilität: Hedging

- Modelle sind nicht vollständig, d.h. Auszahlungen können i.A. nicht durch Handeln im Stock allein repliziert werden.
  - Mathematisch klar durch die Verwendung weiterer stochastischer Prozesse.
  - Theoretisch ist die Verwendung einer weiteren Option ausreichend.
- Praktisch gesehen ist ein Modell vermutlich nicht perfekt.
  - Zur Absicherungen müssen mehrere liquide Optionen verwendet werden.
  - Die Modellparameter ändern sich mit der Zeit.

Stochastische Volatilität: Hedging

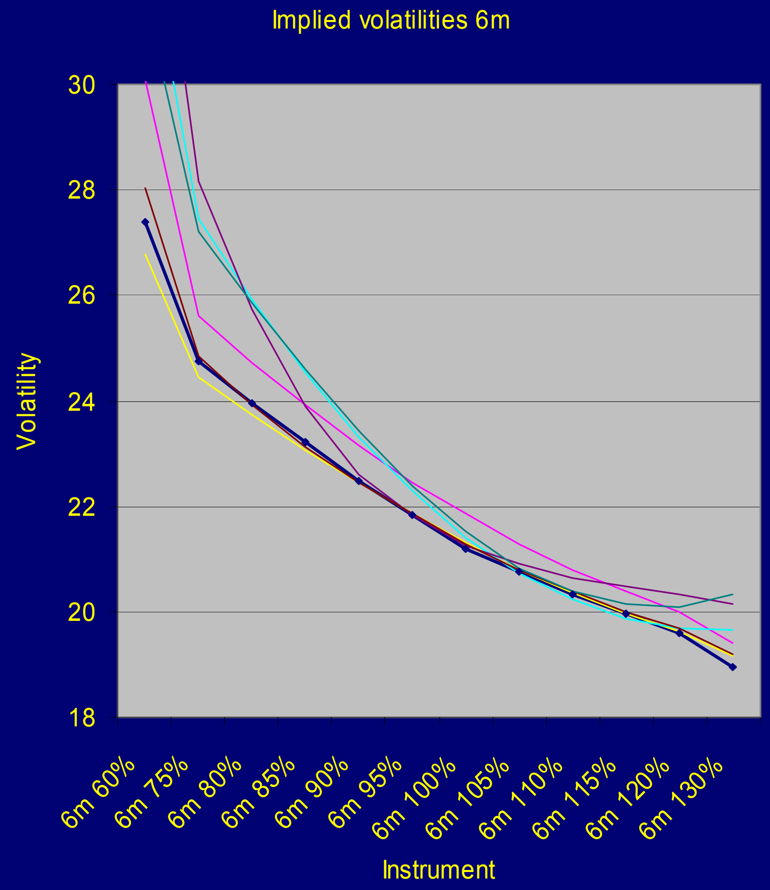
- Der Preis eines strukturierten Produktes p ist eine Funktion der Modellparameter, $p \equiv p(\underline{\sigma})$.

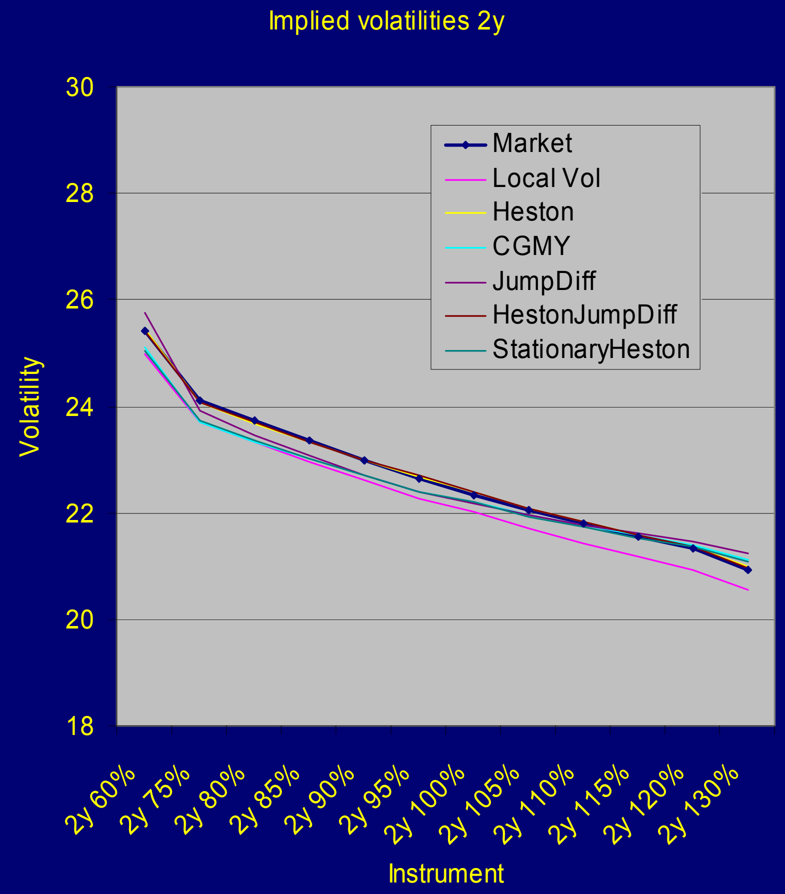
- Hedging
  - Alle Produkte, die mit dem Modell bewertet werden, bilden ein Portfolio P.
  - Dieses hat Sensitivitäten $\left(\partial_{\underline{\sigma}_i} P\right)_{i=1,\ldots,n}$ bezüglich der Modellparameter.
  - Berechne Vanilla-Portfolio mit den inversen Sensitivitäten, so daß eine (kleine) Änderung eines Modellparameters den Wert des gesamten Portfolios “nicht” ändert.
  - Dafür reichen im Prinzip n Optionen, allerdings ist deren Auswahl durch praktische Beschränkungen erschwert (Marktvolumen, Liquidität, Investitionssumme usw).

Die Auswahl eines geeigneten Modells

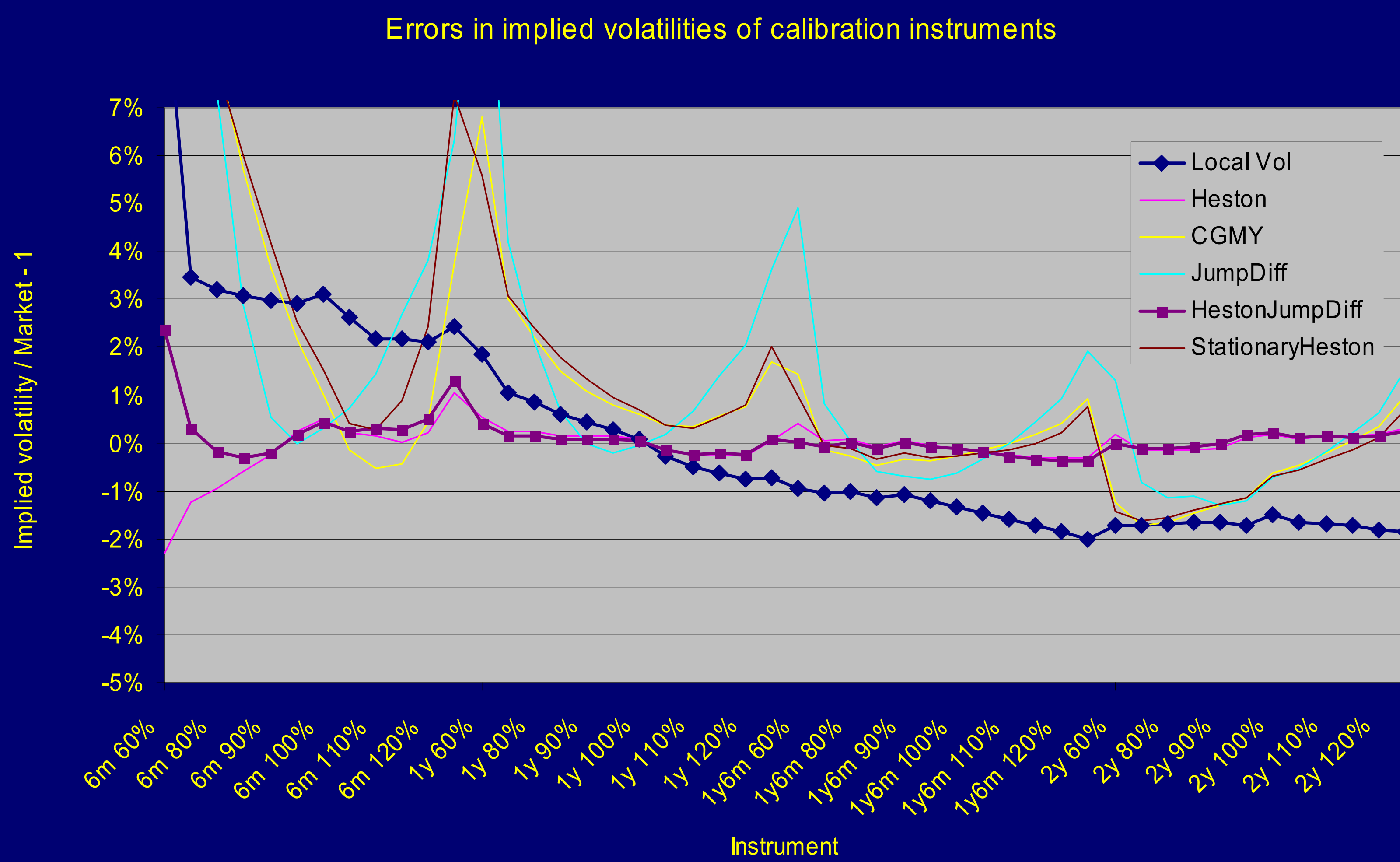
- Die Auswahl eines bestimmten Modells hängt vom Produkt und vom Markt ab.
- Wir Kalibrieren einige Modelle:
  Kalibration zu 6m, 1y, 1y6m und 2y Optionen in einer Strike-Range von 60% bis 130% Spot (Gewichtung Marktpreis).
- Vergleich mit Dupire und Markt.

Ergebnis der Kalibration

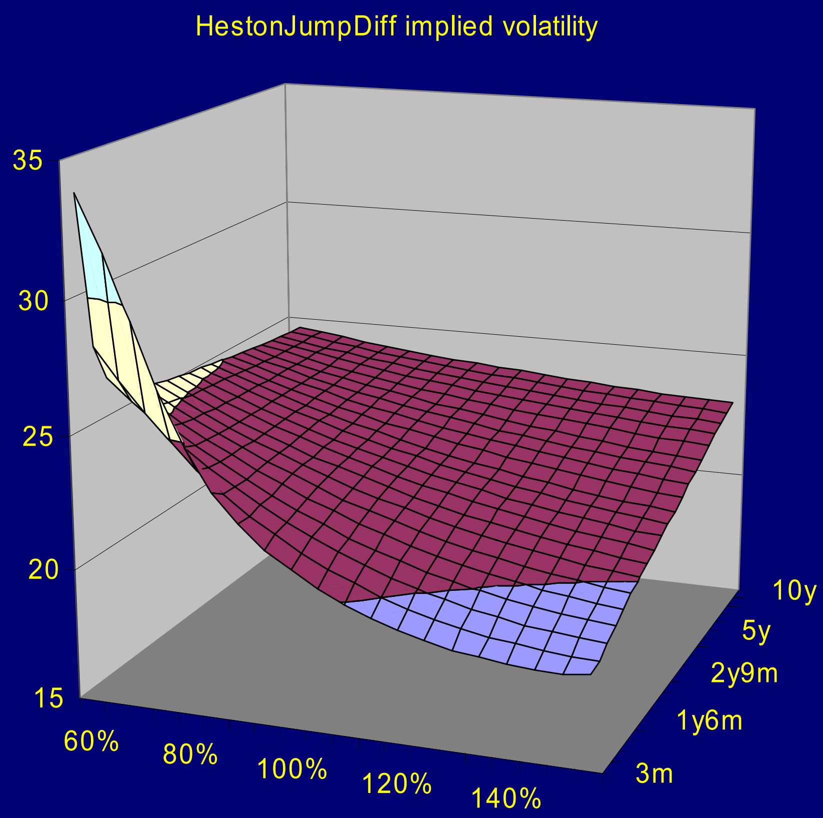


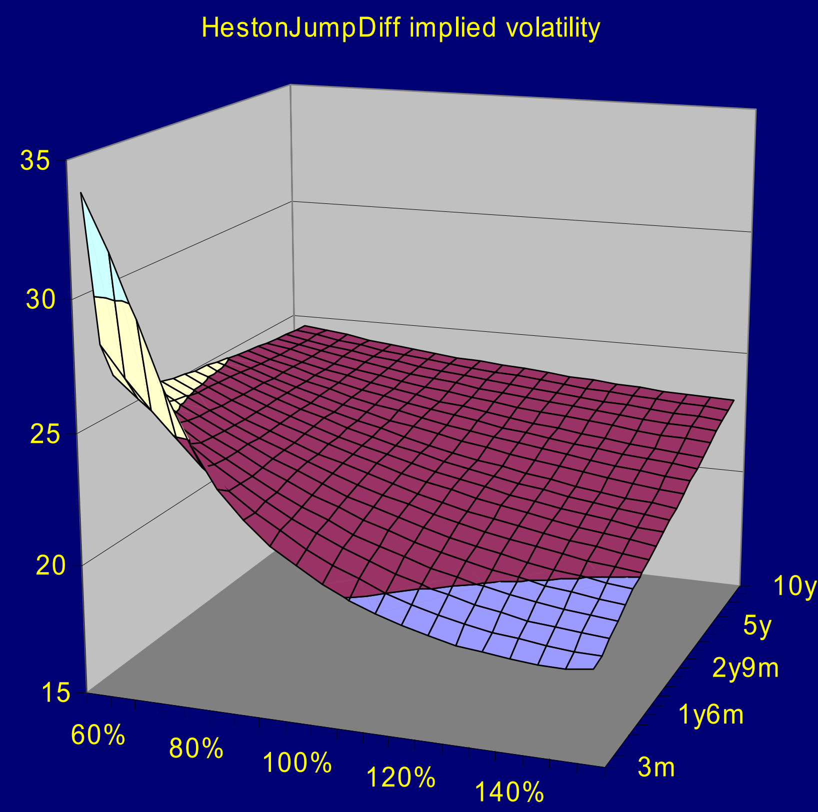


Dichtere Darstellung



Sehr schönes Ergebnis für Heston

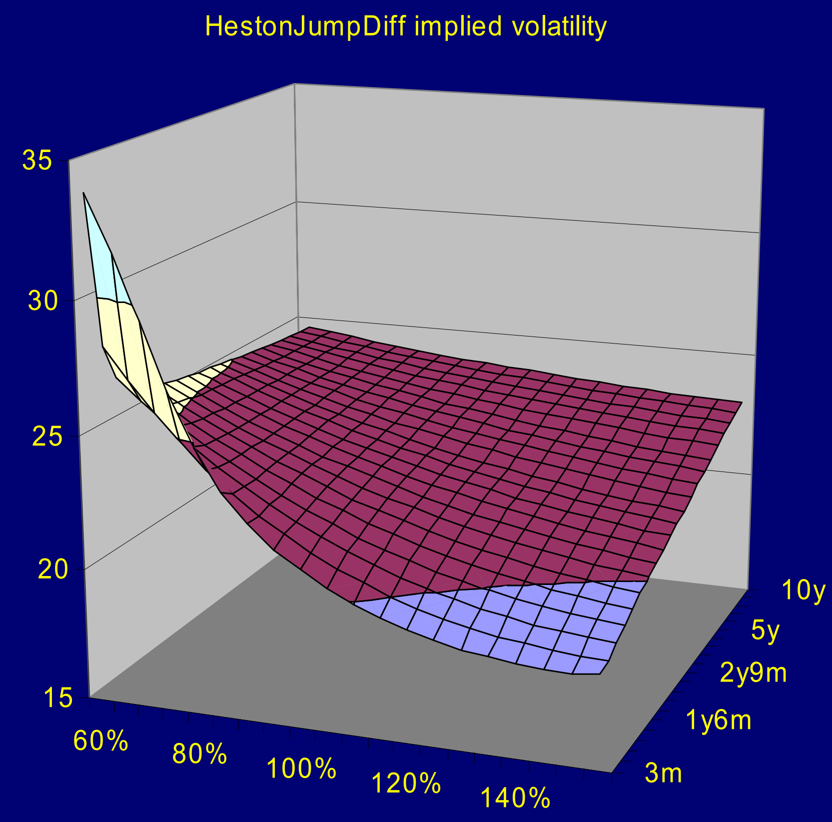


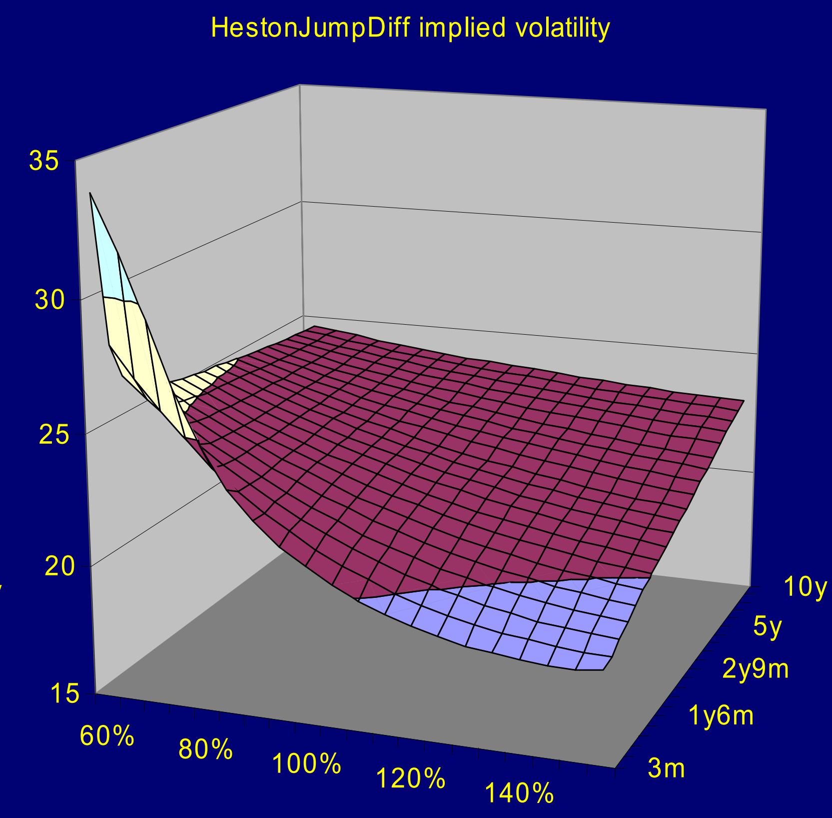


Heston: θ=24.3%, κ=1.4, ξ=21.9%, ρ=-0.53

Shortvol: s_0=20.7%

…und Heston-JumpDiffusion





Heston: $\theta=24.3\%, \kappa=1.4, \xi=21.9\%, \rho=-0.53$

Merton: $\lambda=0.06, \gamma=-56{,}169, \delta=8.53\%$

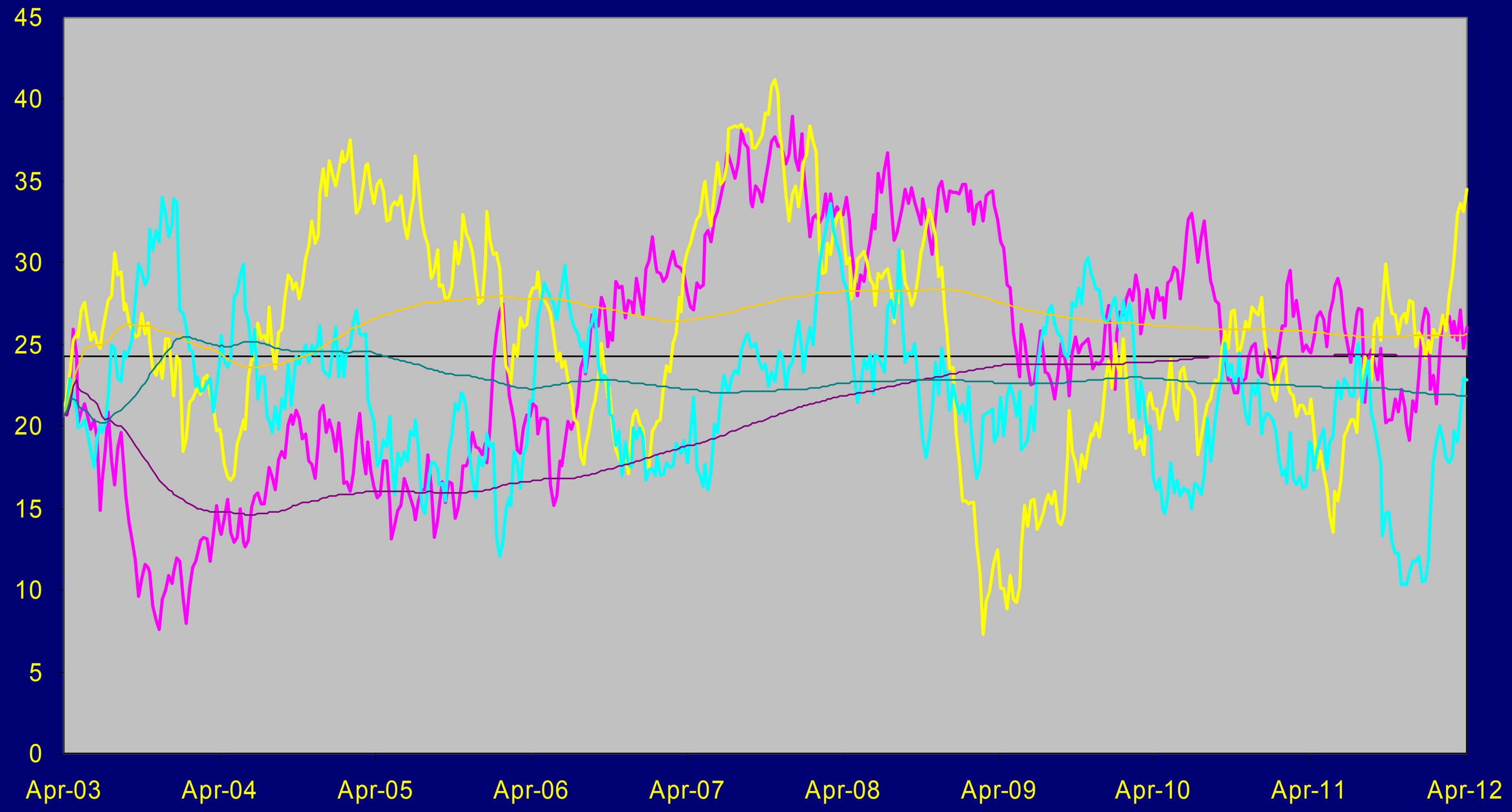
Shortvol: $s_0=20.7\%$

Merton und Heston

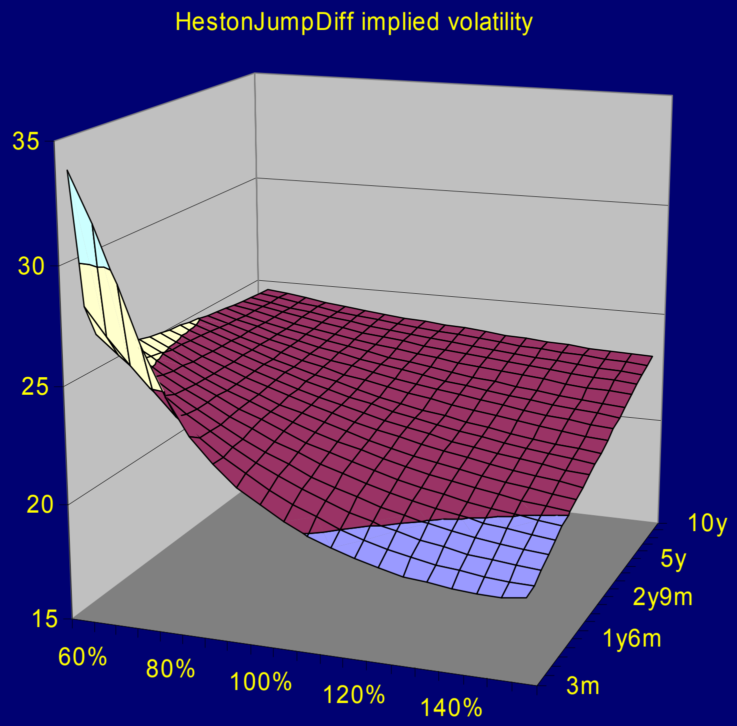
- Einige Modelle, insbesondere das Bates Modell, passen sich sehr gut an den Markt an.
- Die Sprünge unterstützen einen ausdrucksvollen Skew bei kurzen Laufzeiten, wohingegen die „Mean-Reversion“ eine langfristige Stabilität sichert.
- Normalerweise wird das einfache Hestonmodel verwendet - die praktische Interpretation und das Hedging von Jumps sind nicht ganz einfach.

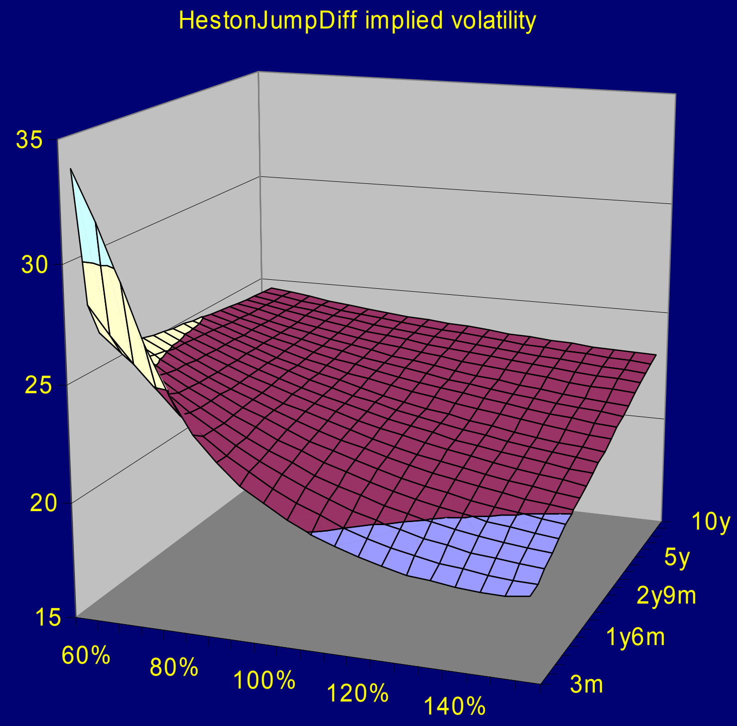
Mean-Reversion

Heston volatility paths - an example of mean reversion



Problem: Forward volatility





- Skew bleibt über die Zeit erhalten, wird aber U-förmig ...

Stochastische Volatilität: Zusammenfassung

- Vorteile (Heston und Bates):
  - Gute und flexible Anpassung an die implied Surface
  - Einfacher zu Hedgen
  - Eine Art Skew bleibt erhalten
- Nachteile
  - Der Forward-Skew ist U-förmig

Stochastische Volatilität: Forward Skew

- Verbesserte Kalibration
  - “Penalty functions”, um bestimmte Skews auszuschließen
    - Tiefere Kenntnis über die Verteilung notwendig.
  - Kalibration direkt auf Forward-Started Options
    - Deren Preis ist selbst geschätzt.
    - Selbst bei Erfolg: Verhalten abeits der Eingabeoptionen nicht garantiert.
    - Sonst eine gute Möglichkeit.
- Verbesserte Modelle
  - Problem der “ShortVol” lösen
  - Propagative Modelle: In Arbeit ….

Stochastische Volatilität: Forward Skew

- Stochastic Implied Volatility (Schönbucher 1998, Cont 2002)
  - Wie bei HJM/BGM-Modellen für Zinsraten wird ein Modell für die ganze Oberfläche entworfen.
    - Wie werden strukturierte Produkte bewertet ?
    - Parameter müssen historisch geschätzt werden (z.B. via PCM).
    - Noch mehr stochastische Faktoren führen zu niedriger Geschwindigkeit.
- Modelle mit “Erinnerung”
- $\rightarrow$ Noch nicht zufriedenstellend gelöst.

References

- Carr and Madan, 1999: *Option valuation using the FFT*. J. Comp. Finance 2-4
- Dupire, 1994: *Pricing with a Smile.* Risk Magazine 7, 18-20.
- Derman and Kani, 1994: *The volatility smile and its implied tree*. Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes
- Hull and White, 1987: *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities.* J. of Finance 42, 281-300.
- Heston, 1993: *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options.* Rev. Fin. Studies 6, 327-343
- Schobel and Zhu, 1998: *Stochastic volatility with an Ornstein-Uhlenbeck process: an extension*. Working paper
- Schönbucher,1998: *A market model for stochastic implied volatility (preprint, from the web)*
- Most of the topics presented are reviewed in:
  Equity derivatives: Theory and applications, Wiley 2002